



**WEST BENGAL STATE UNIVERSITY**

B.Sc. General Part-I Examination, 2022

**MATHEMATICS**

**PAPER-MTMG-I**

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

*The figures in the margin indicate full marks.  
Candidates should answer in their own words  
and adhere to the word limit as practicable.*

*প্রাঙ্গিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।  
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে  
উত্তর করিবে।*

*All symbols are of usual significance.*

**GROUP-A**

বিভাগ-ক

(Full marks 25)

**Answer Question No. 1 and any two from the rest**

১ নং প্রশ্ন ও অবশিষ্টাংশের যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) Find the equation whose roots are  $-1, 2, -3, 4$ .

সেই সমীকরণটি নির্ণয় করো যার বীজগুলি হলো  $-1, 2, -3, 4$ ।

(ii) Resolve into factors:  $a^3 + b^3$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো:  $a^3 + b^3$

(iii) When a matrix is said to be in echelon form?

কখন একটি Matrix-কে, echelon form-এ আছে বলা যাবে ?

(b) Answer any **one** question from the following:

3×1 = 3

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) If  $z = x + iy$  be a complex number and  $\frac{z+1}{z-i}$  be purely imaginary, then show

that  $z$  lies on a circle whose centre is at  $\frac{1}{2}(-1+i)$  and radius is  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

যদি  $z = x + iy$  একটি জটিল রাশি হয় এবং  $\frac{z+1}{z-i}$  একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা হয়, তবে

দেখাও যে  $z$  একটি বৃত্তে অবস্থান করে যার কেন্দ্র  $\frac{1}{2}(-1+i)$  বিন্দুতে এবং যার ব্যাসার্ধ

হলো  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ।

- (ii) Solve the equation  $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ , if  $2 + 3i$  is one of the roots.

$x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$  সমীকরণটি সমাধান করো যার একটি বীজ হলো  $2 + 3i$ ।

- (iii) Find the rank of  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$  matrix-টির rank নির্ণয় করো।

2. (a) Solve  $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$ , if the sum of two roots be equal to the sum of the other two. 5

$x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$  সমীকরণটি সমাধান করো, যার দুটি বীজের যোগফল অন্য দুটি বীজের যোগফলের সমান।

- (b) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of the equation  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ , then find the value of  $\sum \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right)$ . 5

$\alpha, \beta, \gamma$  যদি  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  সমীকরণের বীজ হয়, তবে  $\sum \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

3. (a) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of  $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ , then find the equation whose roots are  $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha), \gamma(\alpha + \beta)$ . 5

$\alpha, \beta, \gamma$  যদি  $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$  সমীকরণের বীজ হয়, তবে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করো যার বীজগুলি হবে  $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha), \gamma(\alpha + \beta)$ ।

- (b) Solve by Cardan's method:  $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$  5

কার্ডানের পদ্ধতিতে সমাধান করোঃ  $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$

4. (a) Prove that  $\arg z - \arg(-z) = \pi$  or  $-\pi$ , according as  $\arg z$  is positive or negative. 5

দেখাও যে  $\arg z - \arg(-z) = \pi$  অথবা  $-\pi$ , যখন  $\arg z$  যথাক্রমে ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক।

- (b) Prove that the roots of the equation  $x^3 - 3x + 1 = 0$  are  $2 \cos \frac{2\pi}{9}, 2 \cos \frac{8\pi}{9}$  and 5

$2 \cos \frac{14\pi}{9}$ .

প্রমাণ করো  $x^3 - 3x + 1 = 0$  সমীকরণের বীজগুলি হলো  $2 \cos \frac{2\pi}{9}, 2 \cos \frac{8\pi}{9}$  এবং  $2 \cos \frac{14\pi}{9}$ ।

5. (a) Solve if possible  $2x - 2y - 4z = 8$  5  
 $2x + 3y + 2z = 8$   
 $-x + y - z = 7/2$

সমাধানযোগ্য হলে সমাধান করোঃ  $2x - 2y - 4z = 8$   
 $2x + 3y + 2z = 8$   
 $-x + y - z = 7/2$

- (b) Find the real values of  $\lambda$ , for which the rank of the matrix  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$  is 5  
less than 4.

$\lambda$ -এর কোন্ মানের জন্য  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$  matrix-এর rank 4-এর কম হবে ?

### GROUP-B

বিভাগ-খ

(Full marks 15)

Answer Question No. 6 and any *one* from the rest

৬ নং প্রশ্ন ও যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও

6. Answer any *one* question from the following: 3×1 = 3

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

- (a) Find the equation to the curve  $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 11$  referred to parallel axes through the point  $(-1, 2)$ .

$(-1, 2)$  বিন্দুগামী অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে  $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 11$  সমীকরণের আকার কি হবে নির্ণয় করো।

- (b) Find the angle between a pair of straight lines, passing through the origin.

মূলবিন্দুগামী একজোড়া সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের মান কি হবে নির্ণয় করো।

- (c) Determine the nature of the conic represented by  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ .

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$  দ্বারা নির্ণীত conic-টির প্রকৃতি বর্ণনা করো।

7. (a) Reduce the equation  $7x^2 - 6xy - y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$  to its canonical form and then find the nature of the conic. 6

$7x^2 - 6xy - y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$  সমীকরণটিকে canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং এরপর এটির প্রকৃতি নিরূপণ করো।

- (b) Show that the straight lines represented by the equations  $x + y + 1 = 0$  and  $(x + y)^2 - 3(x - y)^2 = 0$  are the sides of an equilateral triangle. 6

$x + y + 1 = 0$  এবং  $(x + y)^2 - 3(x - y)^2 = 0$  দ্বারা রূপায়িত সরলরেখাগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করবে কি না, যুক্তিসহ বর্ণনা করো।

8. (a) Prove that the length of the chord of contact of the point  $(h, k)$  with respect to the parabola  $y^2 = 4ax$  is  $\sqrt{\frac{(k^2 + 4a^2)(k^2 - 4ah)}{a}}$ . 6

প্রমাণ করো  $y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তের সাপেক্ষে  $(h, k)$  বিন্দুর chord of contact-এর দৈর্ঘ্য হবে

$$\sqrt{\frac{(k^2 + 4a^2)(k^2 - 4ah)}{a}}$$

- (b) Prove that the locus of the poles of the normal chords of the parabola  $y^2 = 4ax$  is the curve  $y^2(x + 2a) + 4a^3 = 0$ . 6

প্রমাণ করো  $y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তের normal কর্ডের পোলের সঞ্চারণপথের সমীকরণ হবে  $y^2(x + 2a) + 4a^3 = 0$ ।

### GROUP-C

#### বিভাগ-গ

(Full marks 15)

9. Answer any **one** question from the following: 3×1 = 3

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি হইতে যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

- (a) Show that the scalar multiplication of vectors is distributive with respect to the addition of vectors.

দেখাও যে ভেক্টরের স্কেলার গুণফল, ভেক্টরের যোগফলের সাপেক্ষে বণ্টক হবে।

- (b) Find the volume of a tetrahedron by vector method.

ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে একটি tetrahedron-এর আয়তন নির্ণয় করো।

- (c) Prove that  $[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$ .

দেখাও যে,  $[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$ .

10. Answer any **three** questions from the following: 4×3 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

- (a) If  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , then prove that  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ .

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  হলে, প্রমাণ করো  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ ।

- (b) Find the torque about the point  $B(3, -1, 3)$  of a force  $P(4, 2, 1)$  passing through the point  $A(5, 2, 4)$ .

$B(3, -1, 3)$  বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বল  $P(4, 2, 1)$ -এর টর্ক নির্ণয় করো যা  $A(5, 2, 4)$  বিন্দুগামী।

- (c) Prove that the medians of a triangle are concurrent and find the point of concurrence.

প্রমাণ করো একটি ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। ঐ বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করো।

- (d) Show that the points  $(\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$  and  $3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$  are equidistant from the plane  $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}) + 9 = 0$  and lie on opposite sides of it.

দেখাও যে  $(\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$  এবং  $3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$  বিন্দুদুটি  $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}) + 9 = 0$  তলের দুই বিপরীত দিকে সমদূরত্বে অবস্থান করে।

- (e) A force  $3\hat{i} + \hat{k}$  is acting at the point  $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ . Show that the moment about the point  $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  is  $-3\hat{i} + 11\hat{j} + 9\hat{k}$ .

একটি বল  $3\hat{i} + \hat{k}$  একটি বিন্দু  $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$  বরাবর কাজ করে। দেখাও যে  $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  বিন্দুর সাপেক্ষে বলটির মোমেন্ট  $-3\hat{i} + 11\hat{j} + 9\hat{k}$ ।

### GROUP-D

বিভাগ-ঘ

(Full marks 25)

Answer Question No. 11 and any two from the rest

১১ নং প্রশ্ন ও যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

- 11.(a) Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (i) Solve the inequality  $|5 - \frac{2}{x}| < 1$ .

অসমীকরণটির সমাধান করো:  $|5 - \frac{2}{x}| < 1$ ।

- (ii) If  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  for all  $x, y$ ; prove that  $f$  is an odd function.

যদি  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  হয় (যে কোনো  $x$  এবং  $y$ -এর জন্য) তবে প্রমাণ করো যে  $f$  একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

- (iii) If  $f(x) = 1 - |x|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , then find  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

যদি  $f(x) = 1 - |x|$  ও  $-1 \leq x \leq 1$  হয় তাহা হইলে

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(b) Answer any **one** question from the following:

3×1 = 3

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) If  $y = 2 \cos x(\sin x - \cos x)$ , then show that  $y_{10}(0) = 2^{10}$ .

যদি  $y = 2 \cos x(\sin x - \cos x)$  হয়, তবে প্রমাণ করো যে,  $y_{10}(0) = 2^{10}$  হবে।

(ii) Find the angles of intersections of the hyperbolas  $x^2 - y^2 = 8$  and  $xy = 3$ .

নিম্নলিখিত পরাবৃত্তদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করলে যে কোণ উৎপন্ন হবে তা নির্ণয় করো:

$$x^2 - y^2 = 8 \text{ এবং } xy = 3$$

(iii) If  $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$ , then show that  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ .

যদি  $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$  হয়, তবে দেখাও যে,  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ .

12.(a) When a function  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  is said to be continuous at  $a \in D$ ? Show that

2+3

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, 3, 5, \dots \\ 2 & x = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

is continuous on  $\mathbb{N}$ .

‘একটি অপেক্ষক  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ -এর  $a \in D$  বিন্দুতে সন্তত’ ইহার অর্থ লেখো।

$$\text{দেখাও যে, } f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, 3, 5, \dots \\ 2 & x = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

অপেক্ষকটি সমস্ত  $\mathbb{N}$ -এর উপরে সন্তত হবে।

(b) If  $lx + my = 1$  is a normal to the parabola  $y^2 = 4ax$ , then show that  $al^3 + 2alm^2 = m^2$ .

5

যদি  $lx + my = 1$  সরলরেখাটি  $y^2 = 4ax$  অধিবৃত্তের একটি লম্ব হয় তবে প্রমাণ করো যে,  $al^3 + 2alm^2 = m^2$  হবে।

13.(a) If  $x^x y^y z^z = k$  (constant) then prove that at the point  $(x, x, x)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x \log_e(ex)}$ .

5

যদি  $x^x y^y z^z = k$  (ধ্রুবক) হয় তবে প্রমাণ করো যে,  $(x, x, x)$  বিন্দুতে  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x \log_e(ex)}$  হবে।

(b) Show that the function

5

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at  $(0, 0)$ .

$$\text{দেখাও যে, } (0, 0) \text{ বিন্দুতে } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

অপেক্ষকটি সন্তত হবে।

14.(a) Show that pedal equation of the parabola  $y^2 = 4a(x+a)$  is  $p^2 = ar$ . 5

দেখাও যে,  $y^2 = 4a(x+a)$ -এর pedal সমীকরণটি হবে  $p^2 = ar$ ।

(b) Find  $\frac{du}{dt}$  if  $u = x^3 - y \sin xy$  and  $x = \frac{(t-1)}{t}$ ,  $y = t \cos t$ . 5

$\frac{du}{dt}$ -এর মান নির্ণয় করো যেখানে  $u = x^3 - y \sin xy$  এবং  $x = \frac{(t-1)}{t}$ ,  $y = t \cos t$ .

15.(a) Find the radius of curvature of  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  at  $(x, y)$ . 5

$(x, y)$  বিন্দুতে  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ -এর বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(b) If  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$  5

Then show that  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ .

যদি  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$

হয় তবে প্রমাণ করো যে,  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ .

### GROUP-E

#### বিভাগ-ঙ

(Full marks 10)

16. Answer any **one** question from the following: 2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Evaluate / মান নির্ণয় করো:  $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{(x^2-x+1)}} dx$ .

(b) Evaluate / মান নির্ণয় করো:  $\int \frac{2x+3}{3x+4} dx$ .

(c) Show that / দেখাও যে,  $\int_0^2 |1-x| dx = 1$ .

17. Answer any **two** questions from the following: 4×2 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Evaluate / মান নির্ণয় করো:  $\int \frac{\cos 5x + \cos 4x}{1-2 \cos 3x} dx$ .

(b) Evaluate / মান নির্ণয় করো:  $\int \sqrt{\tan x} dx$ .

- (c) Evaluate / মান নির্ণয় করোঃ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \dots + \frac{1}{8n} \right]$ .
- (d) Evaluate / মান নির্ণয় করোঃ  $\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x + \cos x}$ .

**GROUP-F**

বিভাগ-চ

**(Full marks 10)**

18. Answer any **one** question from the following: 2×1 = 2  
 নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

- (a) Find the order and degree of the differential equation  $\left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} = 1 + x$ .

$\left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} = 1 + x$  -অন্তরকল সমীকরণটির ক্রম ও ডিগ্রী নির্ণয় করো।

- (b) Verify that  $V = \frac{a}{r} + b$  satisfies the differential equation  $\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0$ .

দেখাও যে,  $V = \frac{a}{r} + b$  নিম্নলিখিত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে  $\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0$ ।

- (c) Form differential equation from the given relation by eliminating the parameters:  
 $y = Ae^x + Be^{-x}$ ,  $A, B$  are parameters.

নিম্নলিখিত সমীকরণ থেকে  $A, B$  কে অপসারিত করে অন্তরকল সমীকরণটি নির্ণয় করো।

$$y = Ae^x + Be^{-x}$$

19. Answer any **two** questions from the following: 4×2 = 8  
 নিম্নলিখিত যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

- (a) Solve / সমাধান করোঃ  $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)e^x$ .

- (b) Solve / সমাধান করোঃ  $(x - y^2) dx + 2xy dy = 0$ .

- (c) Solve completely / সম্পূর্ণ রূপে সমাধান করোঃ  $y = px + ap(1 - p)$  ;  $p = \frac{dy}{dx}$ .

- (d) Solve / সমাধান করোঃ  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$ .

**N.B. :** Students have to complete submission of their Answer Scripts through E-mail / Whatsapp to their own respective colleges on the same day / date of examination within 1 hour after end of exam. University / College authorities will not be held responsible for wrong submission (at in proper address). Students are strongly advised not to submit multiple copies of the same answer script.

—x—